ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DES ARTS ET METIERS

SESSION DE 1975

CONCOURS B

GÉOMÉTRIE

DURÉE : 3 heures. — COEFFICIENT : 2

Les quatre questions sont très largement indépendantes

NOTATIONS : $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé direct du plan euclidien. Un arc de courbe rectifiable $(\mathcal{A})$ est défini par une représentation paramétrique, les coordonnées x et y du point générique $M(u)$ étant des fonctions continues et à dérivées continues d'un paramètre réel u. s désigne l'abscisse curviligne sur $(\mathcal{A})$ orienté dans le sens des paramètres u croissants, l'origine étant $M(0) = A$. On rappelle que :

$\vec{t} = \dfrac{d(\overrightarrow{OM})}{ds}$ est le vecteur normé directeur de la tangente en M à $(\mathcal{A})$ définissant sur la tangente une orientation conforme à celle de $(\mathcal{A})$; φ désignant une mesure de l'angle $(\vec{i}, \vec{t})$, on pose :

$\vec{n} = \dfrac{d\vec{t}}{d\varphi}$; $R = \dfrac{ds}{d\varphi}$ désigne le rayon de courbure de $(\mathcal{A})$ en M.

Soient X et Y les coordonnées de $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\vec{t}, \vec{n})$: on exprimera x et y en fonction de X, Y, φ; X et Y en fonction de x, y, φ.

On désigne enfin par :

$(\mathcal{B})$ l'ensemble des points H tels que : $\overrightarrow{OH} = Y\vec{n}$

$(\mathcal{C})$ l'ensemble des points K tels que : $\overrightarrow{OK} = X\vec{t}$

$(\mathcal{D}_\lambda)$ l'ensemble des points L tels que : $\overrightarrow{ML} = \lambda\vec{t}$ (λ réel donné).

1° Établir les relations :

$$dX = ds\left(1 + \frac{Y}{R}\right) \; ; \quad dY = -X\frac{ds}{R} \qquad \text{pour } R \neq 0 .$$

2° Déterminer et construire les courbes $(\mathcal{A})$ $(\mathcal{B})$ $(\mathcal{C})$ $(\mathcal{D}_\lambda)$, $(\mathcal{A})$ étant définie par :

$$\begin{cases} x = 1 - \cos u & 0 \leqslant u \leqslant \pi \\ y = \sin u \end{cases}$$

On pourra donner une solution géométrique pour $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{D}_\lambda)$ et établir par un procédé géométrique l'équation polaire de $(\mathcal{B})$. Pour l'étude de $(\mathcal{D}_\lambda)$ sur sa représentation paramétrique, on pourra poser $\lambda = tg\,\omega$.

3° $(\mathcal{A})$ est la courbe définie par la représentation paramétrique :

$$x = \frac{1}{4}(\text{ch } 2u - 1) \qquad y = \text{sh } u \qquad \forall u \in R.$$

a. Déterminer et construire $(\mathcal{A})$.

b. Chercher l'équation polaire de $(\mathcal{B})$: $\rho = f(\theta)$ avec :

$$\theta = (\vec{i}, \vec{n}) \; , \quad \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2} \; ; \quad \rho = Y ;$$

construire cette courbe.

c. Déterminer l'équation polaire de $(\mathcal{C})_\rho = g(\theta)$ avec :

$$\theta = (\vec{i}, \vec{t}) \; , \; 0 < \theta < \pi \; ; \quad \rho = X ;$$

chercher la relation entre le paramètre u du point M et le paramètre u_1 du point M_1 où la droite (OK) recoupe la courbe $(\mathcal{A})$; montrer que $u_1 - u$ a une limite finie lorsque u tend vers $+\infty$; en déduire la limite lorsque u tend vers $+\infty$ du rapport des abscisses curvilignes de M_1 et M sur $(\mathcal{A})$.

Quelle est dans les mêmes conditions la limite du rapport des normes des vecteurs $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OK}$? Donner l'allure de la courbe $(\mathcal{C})$.

4° a est un nombre complexe donné de module 1, d'image A, $\bar{z}$ désigne le conjugué du nombre complexe z.

Soit T_a l'application du plan complexe dans lui-même qui au point m d'affixe z associe le point M d'affixe :

$$Z = \frac{1}{2}(z + a^2\bar{z})$$

a. b étant un nombre complexe donné d'image B dans le plan complexe (B a pour affixe b) déterminer l'ensemble des points m d'affixe z tels que :

— $\bar{b}z$ soit réel $(\exists\, \lambda \in R \,/\, \bar{b}z = \lambda)$,

— $\bar{b}z$ soit imaginaire pur $(\exists\, \lambda \in R \,/\, \bar{b}z = i\lambda)$.

b. Déterminer pour l'application T_a :

les points invariants, tels que $T_a(m) = m$,

l'image par T_a du plan complexe (étudier $\bar{a}Z$),

l'image réciproque $T_a^{-1}(O)$ de l'origine du plan complexe;

c. Posant $z = x + iy$, $Z = X + iY$ montrer que l'application de R^2 dans R^2 $\quad \overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ est un endomorphisme de R^2. Déterminer sa matrice dans la base $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ en fonction de α, argument de a. Définir géométriquement T_a.

d. On suppose que l'argument α de a varie et que x et y sont des fonctions de α telles que la tangente en m à la courbe $(\mathcal{A})$ décrite par m soit perpendiculaire à la droite (OA). Pour chaque valeur de α l'image par T_a de m est un point M. Déterminer $(\mathcal{A})$ pour que l'ensemble des points M ainsi obtenus soit la droite d'équation $X = -1$.

Énoncer le résultat obtenu en utilisant les notations du préambule.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail